数理解析研究所講究録
1153 巻 2000 年 113-121

Appearance of Baker domains and wandering domains

諸澤 俊介
高知大学 理学部

1 有理関数の力学系と超越整関数の力学系

f を有理関数あるいは超越整関数とし、それぞれの場合に X を $\widehat{\mathbb{C}}$ あるいは $\mathbb{C}$ とする。

$$F(f)=\{z\in X \mid \{f^n(z)\} \text{ が } z \text{ のある近傍で正規族をなす。}\}$$

とし、f のファトウ集合と呼ぶ。また、$J(f)=\widehat{\mathbb{C}}\setminus F(f)$ とし f のジュリア集合と呼ぶ。ファトウ集合は開集合であり、ジュリア集合は閉集合である。ともに f の完全不変集合である。$F(f)$ の成分 D が $f(D)\subset D$ となるとき D を f の不変成分と呼ぶ。不変集合については、次の分類定理がある。

定理 1 不変成分は次の5つの内のいずれかである。
(1) 吸引不動点を含む吸引成分
(2) その境界上に放物的不動点が存在し、内部からその点に軌道が収束する放物的成分
(3) 無理的中立不動点を含むジーゲル円板
(4) 円環と等角同値で f^n はその上の無限位数の自己同型写像と見なせるエルマン環
(5) 境界上に f が定義されない点があり、内部からその点に軌道が収束するベーカー領域

ベーカー領域はその定義から超越整関数の力学系にしか現れない。また、任意の自然数 n に対して $F(f^n)=F(f)$ と $J(f^n)=J(f)$ が知られているので周期成分についても同様の分類定理が成立する。$F(f)$ の成分 D が $f^n(D)\neq f^m(D)$ $(n\neq m)$ となるとき D を f の遊走領域と呼ぶ。遊走領域については、次のサリヴァンの定理が良く知られている。

定理 2 有理関数の力学系では遊走領域は現れない。

次の集合

$$I(f)=\{z\mid f^n(z)\to\infty\}$$

を発散点集合と呼ぶ。多項式を考えた場合には無限遠点は超吸引不動点であり、発散点集合は無限遠点の直接鉢と一致する。したがって、この場合には発散点集合とジュリア集合は交わらない。また、f を超越整関数とし、もし f がベーカー領域 D を持つのであれば $D\subset I(f)$ である。さらに次のことが知られている。

定理 3 f を超越整関数とする。このとき次が成立する。

$$I(f)\cap J(f)\neq\emptyset \qquad \overline{I(f)}\supset J(f)$$

f に対して、ζ のある近傍で f^{-1} のすべての分岐が一価にとれるとき、ζ を f の非特異値といい、そうでないときに f の特異値という。特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表す。特異値は力学系の研究で重要な役割を果たす。f が有理関数ならば $\mathrm{sing}(f^{-1})$ は有限集合で臨界値だけからなる。また、超越整関数が特異値を有限個しか持たない場合には、その力学系は次のような意味で有理関数の力学系に似ている。

定理 4 f は超越整関数で $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有限集合とする。このとき $F(f)$ は遊走領域もベーカー領域も持たない。

2 広義一様収束、ハウスドルフ収束、カラテオドリ収束

超越整関数は常に適当な多項式列の広義一様収束極限として考えられる。クラウスコフは [2] において $f_\lambda(z)=\lambda e^z$ に広義一様収束する多項式列として

$$P_{\lambda,n}(z)=\lambda\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

を考えた。f_λ の特異値は 0 ただひとつであるから、$F(f_\lambda)$ は遊走領域もベーカー領域も持たず、周期成分も高々ひとつであることに注意する。このジュリア集合列の収束について考えた。ジュリア集合の収束、すなわち閉集合の収束は次のように定義する。ρ を弦距離とする。$\widehat{\mathbb{C}}$ のふたつのコンパクト集合 A と B の間のハウスドルフ距離 $d(A,\ B)$ は次で定義される。

$$d(A,\ B)=\inf\{\epsilon>0\mid A\subset U_\epsilon(B),\ B\subset U_\epsilon(A)\}$$

一般に関数列が広義一様に収束したとしても、それは必ずしもジュリア集合列のハウスドルフ収束を意味しない。しかしクラウスコフは次のことを示した。

定理 5 ([2]) f_λ が吸引周期系を持つとする。このとき $J(P_{\lambda,n})$ は $J(f_\lambda)$ にハウスドルフ収束する。

さらに木坂は [1] において f_λ に限らず、そのファトウ集合が吸引鉢のみからなるときに上の結果を拡張した。

定理 6 ([1]) 超越整関数 $f(z)$ のファトウ集合 $F(f)$ は吸引周期の鉢からのみなるとする。このとき $f(z)$ に広義一様収束する任意の多項式列 $\{f_n\}$ を取れば、$J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束する。

証明には次の補題が使われる。補題はフルヴィッツの定理から導かれる。

補題 7 $O(z_0)$ を f の p 周期点 z_0 の周期点集合とする。このとき、ある N で任意の $n > N$ に対して f_n は周期点集合 $O(z_0^{(n)})$ で $O(z_0)$ にハウスドルフ収束するようなものが存在する。さらに $O(z_0)$ が吸引周期であれば、$O(z_0^{(n)})$ も吸引周期である。

ファトウ集合列の収束、すなわち開集合列の開集合への収束も定義できる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合列 U_n が開集合 U にカラテオドリー収束するとは次のふたつを満たすときをいう。
(1) U 内の任意のコンパクト集合 K に対して、ある N が存在し、任意の $n > N$ に対して $K \subset U_n$ となる。
(2) O が無限個の U_n に含まれる開集合ならば、$O \subset U$ である。

ハウスドルフ収束とカラテオドリ収束はそれぞれ互いの補集合の収束をいっている。したがって特に次がいえる。

命題 8 ジュリア集合がハウスドルフ収束する必要十分条件はファトウ集合がカラテオドリー収束することである。

また、次のことも容易に示せる。

補題 9 $\{f_n\}$ が f に局所一様収束するとする。ある開集合 U が無限個の n に対して $U \subset F(f_n)$ となるならば $U \subset F(f)$ である。

3 考察

多項式のファトウ集合には遊走領域もベーカー領域も決して現れない。しかし、遊走領域あるいはベーカー領域を持つ超越整関数に広義一様収束する多項式列は常に存在する。以前の数理解析研講究録 [3] でベーカー領域に適当なファトウ成分の列が収束する例、しない例を示した。その時の、ファトウ成分は充填ジュリア集合に含まれているものであった。今回は、発散点集合について考えてみる。

超越整関数として

$$f(z) = 2z - 2e^z$$

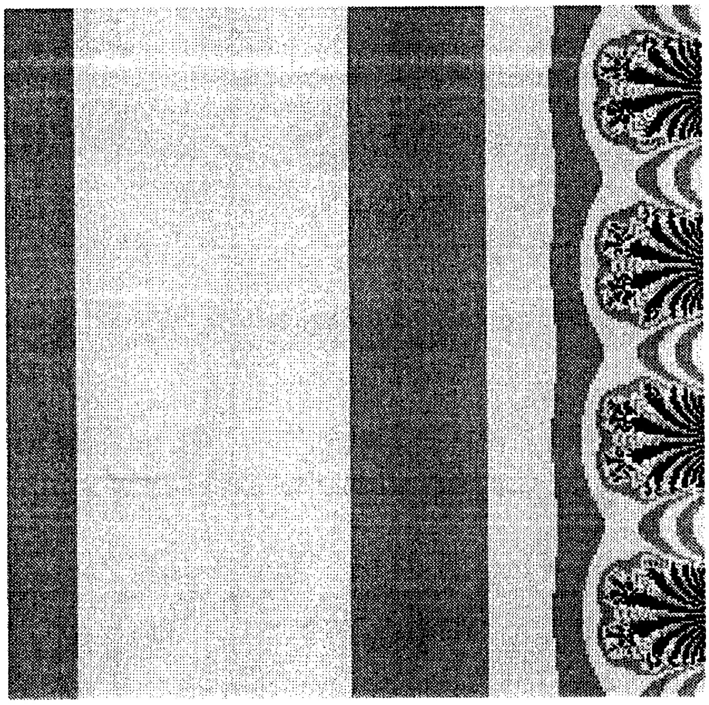

図 1: $f(z) = 2z - 2e^z$

を考える。これは

$$F(z) = z^2 e^{-2z}$$

の対数持ち上げである。

$$\mathrm{sing}(F^{-1}) = \{0,\ F(1) = e^{-2}\}$$

である。したがって $F(F)$ はベーカー領域も遊走領域も持たない。0 は漸近値であり、0 と 1 は臨界値である。さらに 0 は不動点であるから、超吸引不動点となる。実数に限定してグラフ解析を行うと $0 \le x \le 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$$

がわかるから、 $F(F)$ は 0 を含む超吸引不変成分以外に周期成分を持たない。さらに

$$f([0,\ \infty)) = [0,\ e^{-2}] \qquad f((-\infty,\ 0)) = (0,\ \infty)$$

であり、0 の十分小さな近傍の逆像はちょうど二つの成分からなり、それらはともに実軸と交わるので、$F(F)$ はただ一つの成分からなる。この超吸引成分が対数持ち上げで f のベーカー領域 B となる。したがって、$F(f)$ もただ一つの成分からなる。また

$$A = \{z \mid \mathrm{Re}\, z < -\log 2\}$$

とすると $z \in A$ に対して $|e^z| < 1/2$ であるから

$$A \subset B$$

である。

まず近似関数列として

$$h_n(z) = 2z + \frac{z^2}{n} - 2\frac{n}{n+2}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n+2}$$

を考える。

$$h_n'(z) = 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)\left\{1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$$

であるから、有界な臨界点は

$$-n \qquad \text{と} \qquad -n + n\exp\left(\frac{k}{n}2\pi i\right) \qquad (k = 0,\ 1, \cdots,\ n-1)$$

となる。さらに

$$h_n(-n) = -n$$

であるから、$z = -n$ は超吸引不動点である。この不動点を含む超吸引不変成分を B_n とする。計算により

$$[-n,\ 0] \subset B_n$$

が示されるので、有界な臨界点すべてが B_n に含まれることがわかる。したがって、$J(h_n)$ は連結であり、さらに $F(h_n)$ はちょうど二つの成分からなることが導かれる。以前の数理解析研講究録 [3] の例と同様にして B_n が B にカラテオドリー収束することが示せる。さらに $F(f)$ がただ一つの成分からなることより $J(h_n)$ が $J(f)$ にハウスドルフ収束することもわかる。

次に近似関数列として

$$f_n(z) = 2z - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

を考える。

$$f_n'(z) = 2 - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1}$$

より、臨界値は

$$-n + n\exp\left(\frac{k}{n-1}2\pi i\right) \qquad (k = 0,\ 1, \cdots,\ n-2)$$

となる。今 $\epsilon > 0$ を固定し

$$D_n = \{z = re^{i\theta} \mid r > (2+\epsilon)n,\ \theta \in [0,\ 2\pi)\}$$

とすると、十分大なるすべての n に対して $f_n(D_n) \subset D_n$ である。一方

$$f_n\left(-n + n\exp\left(\frac{k}{n-1}2\pi i\right)\right) = -2n + 2(n-1)\exp\left(\frac{k}{n-1}2\pi i\right)$$

となるから $J(f_n)$ は非連結である。

ここで、$f_n(z)$ の不動点を考えてみる。すなわち

$$z - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 0$$

の解の存在場所を調べる。$0 < r_1 < 1 < r_2$ を固定する。ルーシェの定理により、十分大なるすべての n に対して

$$\{z \mid r_1 n < |z+n| < r_2 n\}$$

の中に n 個の解が存在することが示される。これからは n を偶数とする。さらに不動点定理を用いると、任意の $\theta > 0$ に対して

$$\left\{z \,\middle|\, r_1 n < |z+n| < r_2 n,\ \left|\arg(z+n) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\pi\right| < \theta\right\}$$

を示すことができる。ジュリア集合は完全不変であるから、これらの不動点の逆像を考えると、原点の適当な近傍に対して、十分大なるすべての n について $J(f_n)$ の点があることがわかる。したがって、$J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束しない。

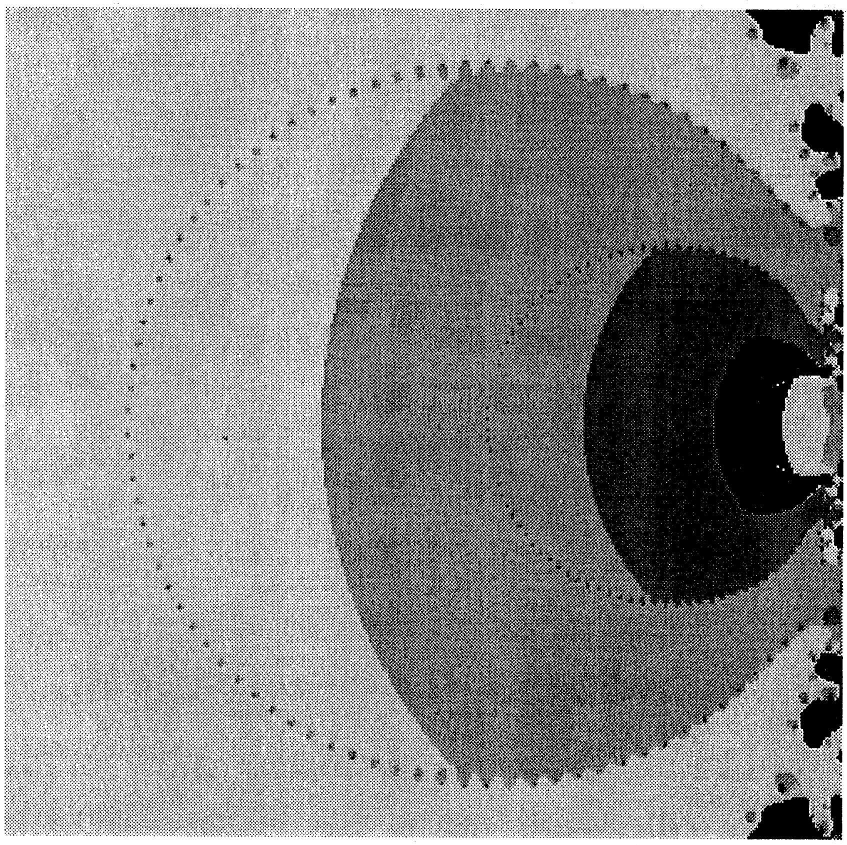

図 2: $f_n(z) = 2z - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $n = 100$, $z = x + iy$, $-30 \le x \le 0$, $-15 \le y \le 15$

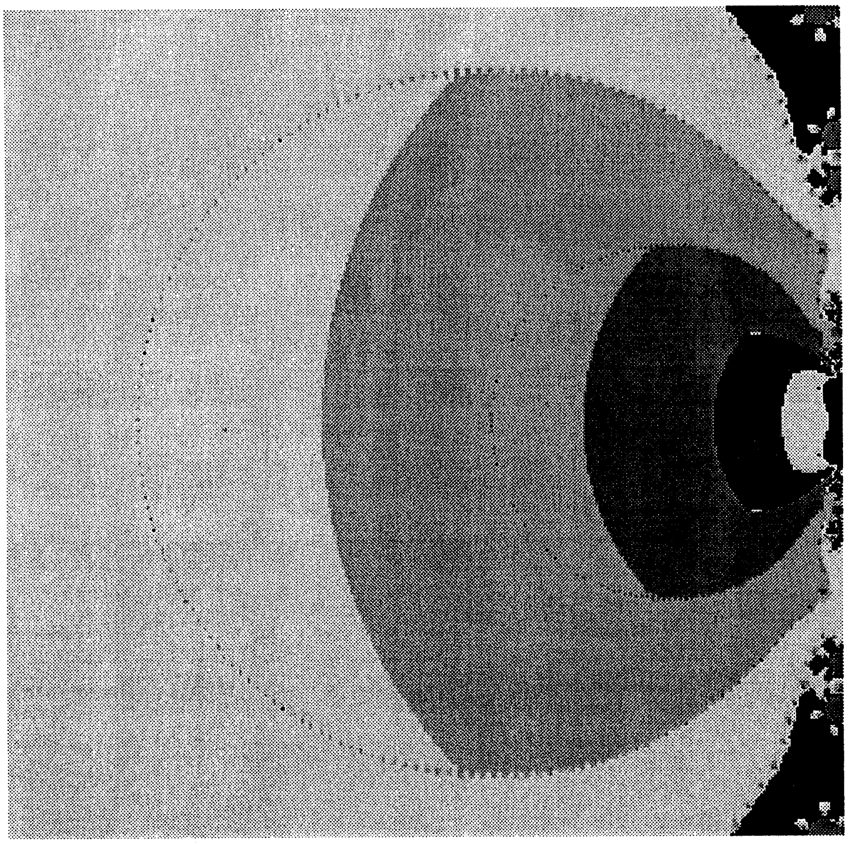

図 3: $f_n(z) = 2z - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $n = 200$, $z = x + iy$, $-30 \leq x \leq 0$, $-15 \leq y \leq 15$

参考文献

[1] Kisaka M., Local uniform convergence and convergence of Julia sets, Nonlinearity, 8(1995), 273-81.

[2] Krauskopf B., Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda(1+z/d)^d$, Int. J. Bif. Chaos, 3(1993), 257-270.

[3] 諸澤 俊介, ベーカー領域あるいは遊走領域へのカラテオドリ収束について, 数理解析研究所講究録 1087, 11-20.

[4] 上田、谷口、諸澤、「複素力学系序説」 培風館 1995